

## **ANALISIS NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG SCHRODINGER GAYUT WAKTU DENGAN METODE CRANK-NICOLSON**

***Supardiyono***

*Jurusan Fisika FMIPA UNESA Kampus Ketintang Surabaya  
e-mail: idayono@yahoo.com*

### **ABSTRAK**

Telah dilakukan penelitian tentang penyelesaian numerik persamaan Schrodinger bergantung waktu dan visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  dengan metode Crank-Nicolson menggunakan bahasa pemrograman Matlab 7.0. Fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  itu sendiri tidak mempunyai arti fisis apa-apa, tetapi probabilitas  $P(x,t)$  diinterpretasikan sebagai kerapatan probabilitas yaitu kemungkinan (peluang) untuk mendapatkan partikel yang program komputer tersebut diperoleh nilai numerik dan visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan pendekatan metode Crank-Nicolson. Metode Crank-Nicolson mempunyai taraf ketelitian (akurasi) dan kestabilan yang tinggi. Untuk step waktu ( $dt$ ) yang semakin kecil diperoleh nilai numerik yang mendekati (hampir sama) dengan solusi analitik sehingga taraf ketelitiannya (akurasi) tinggi. Sehingga dapat digunakan sebagai instrumen untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger bergantung waktu.

**Kata kunci :** persamaan Schrodinger, fungsi gelombang, probabilitas, metode Crank-Nicolson

### **I. PENDAHULUAN**

Persamaan Schrodinger pada awalnya merupakan jawaban dari dualisme partikel-gelombang yang lahir dari gagasan de Broglie yang menggunakan persamaan kuantisasi cahaya Planck dan prinsip fotolistrik Einstein untuk melakukan kuantisasi pada orbit elektron. Selain Schrodinger dua orang fisikawan lainnya yang mengajukan teorinya masing-masing adalah Werner Heisenberg dengan Mekanika Matriks dan Paul Dirac dengan Aljabar Kuantum. Ketiga teori ini merupakan tiga teori kuantum lengkap yang berbeda dan dikerjakan terpisah namun ketiganya setara. Teori Schrodinger kemudian lebih sering digunakan karena rumusan matematisnya yang relatif lebih sederhana. Meskipun banyak mendapat kritikan persamaan Schrodinger telah diterima secara luas sebagai persamaan yang menjadi postulat dasar mekanika kuantum. Walaupun rumusan matematis persamaan Schrodinger lebih sederhana dibandingkan Mekanika Matriks dan Aljabar Kuantum, pemecahan persamaan ini tetap membutuhkan pengetahuan matematika lanjut. ([http://www.geocities.com/sang\\_nandar/fisika](http://www.geocities.com/sang_nandar/fisika))

Simulasi komputer merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menggambarkan fenomena-fenomena fisika secara jelas atau secara visual sehingga mudah untuk diamati dan dipahami. Demikian juga halnya dalam menjelaskan fenomena pada persamaan Schrodinger yang mampu menjelaskan harga karakteristik gelombang de Broglie yang berkaitan dengan sebuah partikel yang bergerak pada titik tertentu pada saat waktu tertentu. Salah satu metode penyelesaian persamaan-persamaan fisika yang rumit secara analitik akan menjadi mudah bila menggunakan metode numerik. Metode Crank-Nicolson merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan Schrodinger bergantung waktu. ([http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson_method))

Seiring perkembangan teknologi informasi, visualisasi dan simulasi dengan pemrograman komputer diharapkan dapat memainkan peranan penting dalam sains dan pendidikan. Diperlukan software yang dapat membantu para guru sains untuk mengembangkan simulasi komputer sebagai

media pembelajaran, dalam hal ini pemrograman MATLAB 7.0 merupakan salah satu bahasa pemrograman untuk pembuatan program-program aplikasi fisika. Tujuan penelitian adalah untuk : (1) Melakukan analisa matematis dan numerik penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan metode Crank-Nicolson. (2) Membuat visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB 7.0.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### A. Discretisasi Finite Difference

#### 1) Metode Ekplisit

Discretisasi *finite-difference* persamaan Schrodinger bergantung waktu, dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan metode ekplisit. Discretisasi ruang dengan menggunakan pendekatan yaitu,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{\psi_{xn+1} - 2\psi_{xn} + \psi_{xn-1}}{a^2} \quad (1)$$

Kemudian dengan menerapkan pendekatan *times-difference ekplisit*

$$\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \frac{\psi_{xn}^{tj+1} - \psi_{xn}^{tj}}{b} \quad (2)$$

Dengan **b** adalah interval waktu. Dengan menerapkan pendekatan *finite-difference ekplisit* untuk persamaan Schrodinger

$$\psi_{xn}^{tj+1} = \psi_{xn}^{tj} - \frac{ib}{\hbar} \left[ -\frac{\hbar^2}{2ma^2} (\psi_{xn+1}^{tj} - 2\psi_{xn}^{tj} + \psi_{xn-1}^{tj}) + V_{xn} \psi_{xn}^{tj} \right] \quad (3)$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk operator yaitu

$$\psi^{tj+1} = (I - \frac{i}{\hbar} bH) \psi^{tj} \quad (4)$$

Dengan **H** adalah discretisasi Hamiltonian dan **I** adalah matrik satuan (dengan matrik potensial **V** termasuk di dalamnya) dan **I** adalah matrik satuan. Kelemahan dengan pendekatan ini secara numerik tidak stabil dan juga operator  $(I - \frac{i}{\hbar} bH)$  tidak *unitary*, yang digunakan dalam

menentukan probabilitas yaitu  $\int \psi^* \psi dx = 1$

#### 2) Metode Implisit

Discretisasi metode implisit persamaan Schrodinger bergantung waktu yaitu;

$$\psi_{xn}^{tj} = \psi_{xn}^{tj+1} - \frac{ib}{\hbar} \left[ -\frac{\hbar^2}{2ma^2} (\psi_{xn+1}^{tj+1} - 2\psi_{xn}^{tj+1} + \psi_{xn-1}^{tj+1}) + V_{xn} \psi_{xn}^{tj+1} \right] \quad (5)$$

Persamaan di atas dapat juga ditulis

$$\psi^{tj+1} = (I + \frac{i}{\hbar} bH)^{-1} \psi^{tj} \quad (6)$$

#### 3) Bentuk Cayley

Teknik memperoleh operator *discretisasi finite difference* numerik yang stabil dan *unitary* yaitu dengan *Cayley Form*, dengan menggunakan *centered-time-difference* atau skema Crank-Nicolson untuk membuat discretisasi waktu

$$i\hbar \frac{\psi_{xn}^{tj+1} - \psi_{xn}^{tj}}{b} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} + V(x)\psi(x,t) \right]_n^{tj+1} + \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} + V(x)\psi(x,t) \right]_n^{tj} \right\} \quad (7)$$

Dan discretisasi ruang yaitu

$$i\hbar \frac{\psi_{x_n}^{t_{j+1}} - \psi_{x_n}^{t_j}}{b} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\frac{\hbar^2}{2ma^2} (\psi_{x_{n+1}}^{t_{j+1}} - 2\psi_{x_n}^{t_{j+1}} + \psi_{x_{n-1}}^{t_{j+1}}) + V_{x_n} \psi_{x_n}^{t_{j+1}} \right] \right. \\ \left. + \left[ -\frac{\hbar^2}{2ma^2} (\psi_{x_{n+1}}^{t_j} - 2\psi_{x_n}^{t_j} + \psi_{x_{n-1}}^{t_j}) + V_{x_n} \psi_{x_n}^{t_j} \right] \right\} \quad (8)$$

diperoleh

$$\psi_{x_n}^{t_{j+1}} + if_{x_n} \psi_{x_n}^{t_{j+1}} + 2ig \psi_{x_n}^{t_{j+1}} - ig \psi_{x_{n+1}}^{t_{j+1}} - ig \psi_{x_{n-1}}^{t_{j+1}} \\ = \psi_{x_n}^{t_j} - if_{x_n} \psi_{x_n}^{t_j} - 2ig \psi_{x_n}^{t_j} + ig \psi_{x_{n+1}}^{t_j} + ig \psi_{x_{n-1}}^{t_j} \quad (9)$$

$$\text{dimana } f_{x_n} = \frac{b}{2\hbar} V_{x_n} \text{ dan } g = \frac{b\hbar}{4ma^2}$$

$$(1 + if_{x_n} + 2ig) \psi_{x_n}^{t_{j+1}} - ig \psi_{x_{n+1}}^{t_{j+1}} - ig \psi_{x_{n-1}}^{t_{j+1}} \\ = (1 - if_{x_n} - 2ig) \psi_{x_n}^{t_j} + ig \psi_{x_{n+1}}^{t_j} + ig \psi_{x_{n-1}}^{t_j} \quad (10)$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matrik yaitu

$$(I + iH) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{bmatrix}^{t_{j+1}} = (I - iH) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{bmatrix}^{t_j} \quad (11)$$

Dengan **I** adalah matrik satuan, dan **H** adalah

$$H = \begin{bmatrix} f_1 + 2g & -g & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -g & f_2 + 2g & -g & 0 & 0 & \dots \\ & -g & f_3 + 2g & -g & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & & \vdots & & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & -g & f_{N-1} + 2g & -g \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -g & f_N + 2g \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan *difference* numerik dalam Cayley's form adalah

$$\psi^{t_{j+1}} = \frac{I - iH}{I + iH} \psi^{t_j} \quad (12)$$

Hubungan operator waktu  $\psi_j$  dengan  $\psi_{j+1}$  tidak hanya stabil secara numerik tetapi juga *unitary*, yaitu

$$\left( \frac{I - iH}{I + iH} \right)^* \left( \frac{I - iH}{I + iH} \right) = \left( \frac{I + iH}{I - iH} \right) \left( \frac{I - iH}{I + iH} \right) = I \quad (13)$$

## B. Metode Numerik Crank-Nicolson.

Metode Crank-Nicolson merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode numerik Crank-Nicolson merupakan kombinasi dari metode *Backward Times Center Space* (BTCS) dan metode *Forward Times Center Space* (FTCS), sehingga memberi efek akurasi yang cukup dan tingkat kestabilan yang tinggi. (Suarga dan Math, 2008 :191)

$$\text{FTCS} = \frac{\psi_j^{k+1} - \psi_j^k}{\Delta t} = \frac{\psi_{j-1}^k - 2\psi_j^k + \psi_{j+1}^k}{h^2} - \psi_j^k \quad (14)$$

$$\text{BTCS} = \frac{\psi_j^{k+1} - \psi_j^k}{\Delta t} = \frac{\psi_{j-1}^{k+1} - 2\psi_j^{k+1} + \psi_{j+1}^{k+1}}{h^2} - \psi_j^{k+1} \quad (15)$$

$$\text{Crank-Nicolson} = \frac{1}{2}(\text{FTCS} + \text{BTCS})$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi_j^{k+1} - \psi_j^k}{\Delta t} &= \frac{(\psi_{j-1}^k - 2\psi_j^k + \psi_{j+1}^k + \psi_{j-1}^{k+1} - 2\psi_j^{k+1} + \psi_{j+1}^{k+1})}{2h^2} - \frac{1}{2}(\psi_j^k + \psi_j^{k+1}) \\ \psi_j^{k+1} - \psi_j^k &= \frac{\Delta t}{2h^2}(\psi_{j-1}^{k+1} - 2\psi_j^{k+1} + \psi_{j+1}^{k+1} + \psi_{j-1}^k - 2\psi_j^k + \psi_{j+1}^k) - \frac{\Delta t}{2}(\psi_j^k + \psi_j^{k+1}) \\ \psi_j^{k+1} - \psi_j^k &= +\frac{\gamma}{2}(\psi_{j-1}^{k+1} - 2\psi_j^{k+1} + \psi_{j+1}^{k+1} + \psi_{j-1}^k - 2\psi_j^k + \psi_{j+1}^k) - \frac{\Delta t}{2}(\psi_j^k + \psi_j^{k+1}) \\ -\frac{\gamma}{2}\psi_{j-1}^{k+1} + \left(1 + \gamma + \frac{\Delta t}{2}\right)\psi_j^{k+1} - \frac{\gamma}{2}\psi_{j+1}^{k+1} &= +\frac{\gamma}{2}\psi_{j-1}^k + \left(1 - \gamma - \frac{\Delta t}{2}\right)\psi_j^k + \frac{\gamma}{2}\psi_{j+1}^k \end{aligned} \quad (16)$$

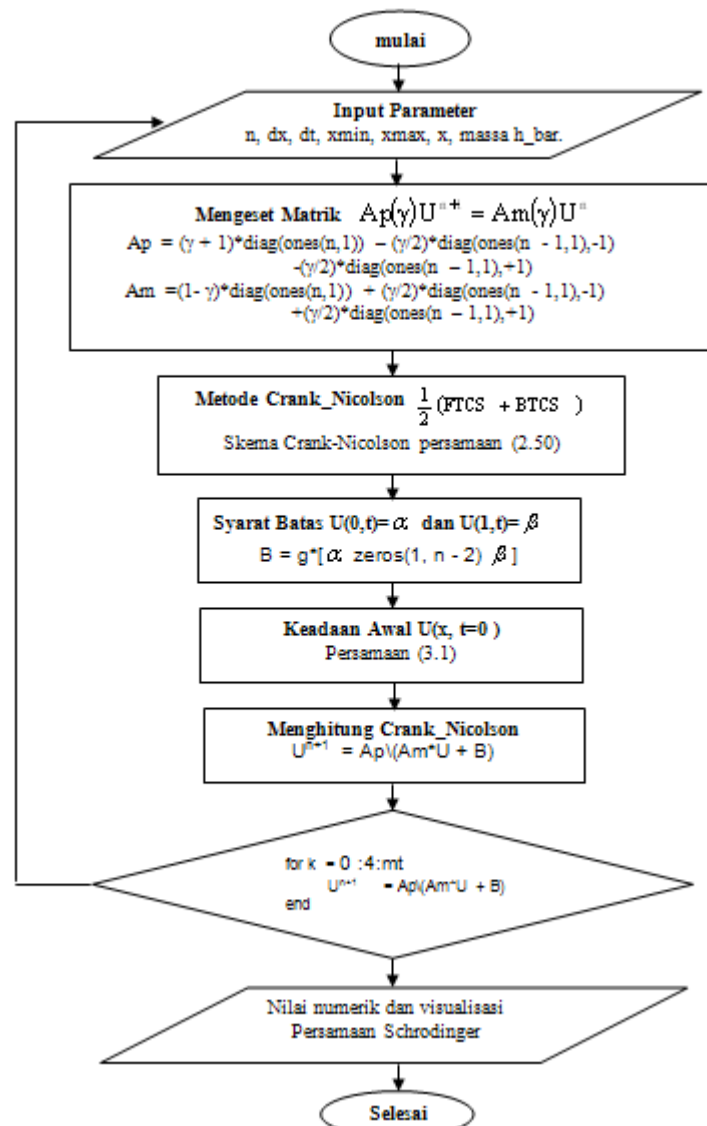
(<http://www.google.co.id/search?solved+Crank-Nicolson>) (25 maret 2008)

dengan  $\gamma = \frac{\Delta t}{h^2}$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

### III. METODE PENELITIAN

#### 1) Analisis Numerik dengan Metode Crank-Nicolson

Analisis numerik persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan metode Crank-Nicolson dapat digunakan flowchart berikut :



Gambar 1: Flowchart Program Crank-Nicolson

## 2) Penyelesaian Analitik

Penyelesaian persamaan diferensial, tidak terkecuali solusi persamaan Schrodinger, memerlukan kondisi awal agar dapat dilakukan komputasi numerik dengan step-size tertentu. Pada kondisi ini anggaplah sebuah partikel bebas yang terlokalisasi pada posisi  $x_0$  dengan paket gelombang selebar  $\sigma_0$  dan dengan momentum rata-rata  $p_0 = \hbar k_0$  ( $k_0$  adalah rata-rata angka gelombang). Apabila digunakan paket gelombang berbentuk Gaussian, maka gelombang awalnya adalah

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0} \sqrt{\pi}} \exp(ik_0 x) \exp\left[-(x - x_0)^2 / 2\sigma_0^2\right] \quad (17)$$

Perlu diperhatikan bahwa fungsi gelombang ini ternormalisasi sehingga:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad (18)$$

Juga perlu diingat bahwa kondisi ketak-pastian (*uncertainty*)  $\Delta x \Delta p \leq \frac{\hbar}{2}$

Pada ruang bebas fungsi gelombang adalah sebagai berikut: (Suarga dan Math, 2008: 192)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0} \sqrt{\pi}} \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp(ik_0(x - p_0 t / m)) \exp\left[-(x - x_0 - p_0 t / m)^2 / 2\sigma^2\right] \quad (19)$$

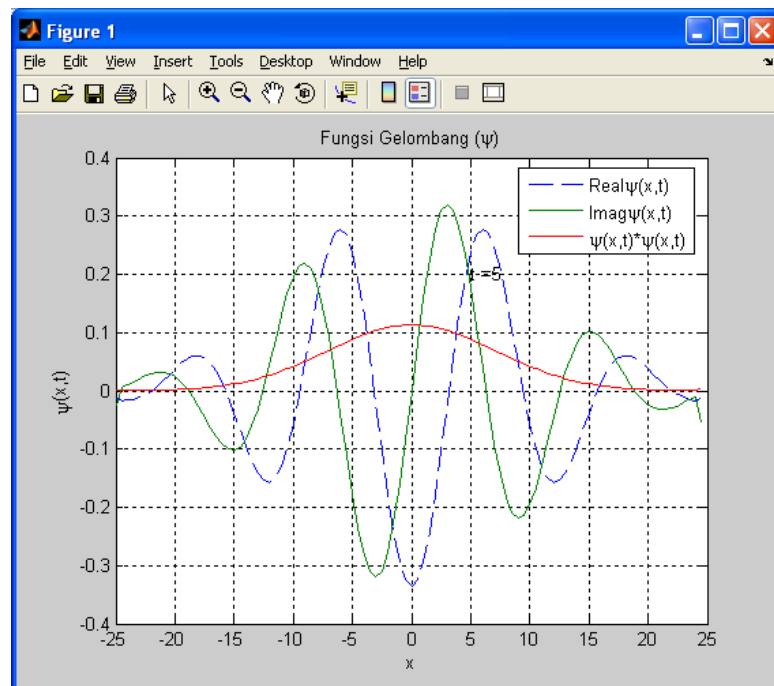
di mana  $\alpha^2 = \sigma_0^2 + i\hbar t / m$ .

## IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

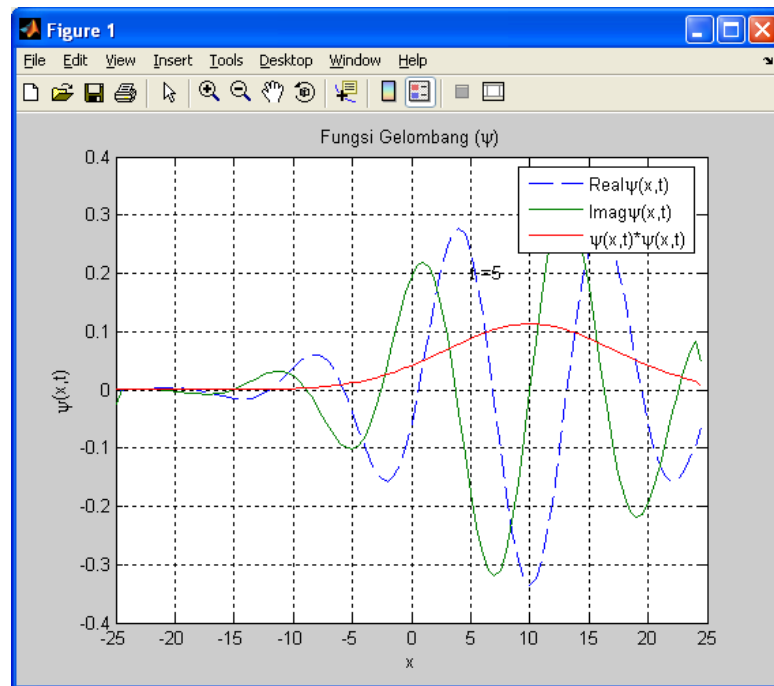
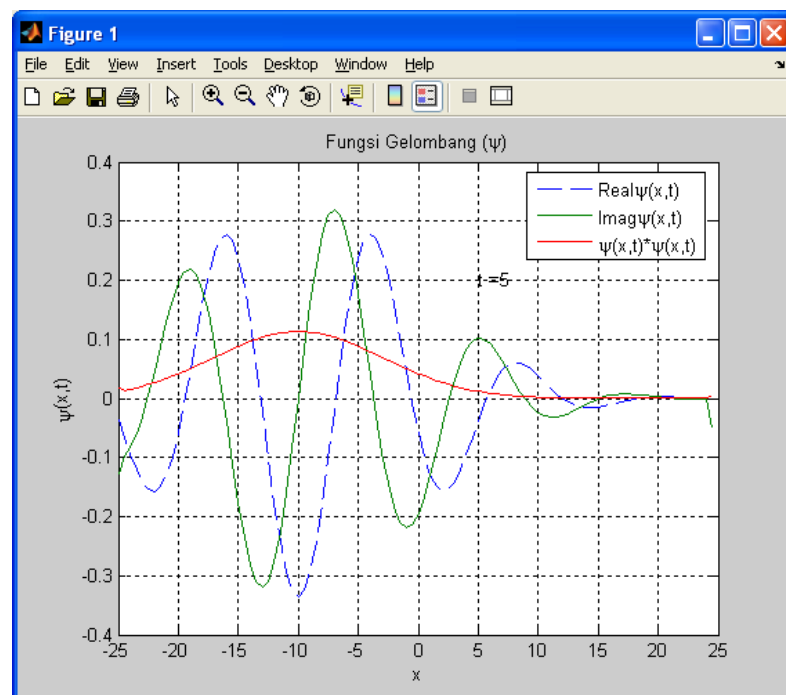
### 1) Hasil Program

Hasil dari program yaitu diperoleh nilai numerik penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan metode Crank- Nicolson dan visualisasi fungsi gelombang fungsi gelombang  $\psi(x, t)$  dan probabilitas  $P(x, t)$ .

Visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x, t)$  dan probabilitas  $P(x, t)$  dengan  $\Delta x = 0,5$ ,  $\Delta t = 0,05$  dan  $V = 0$  adalah sebagai berikut.



Gambar 2.  $\psi(x, t)$  dengan pusat  $x = 0$

Gambar 3.  $\psi(x,t)$  dengan pusat  $x = 10$ Gambar 4.  $\psi(x,t)$  dengan pusat  $x = -10$ 

## 2) Pembahasan

Setelah program simulasi komputer penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dijalankan dengan inputan (*masukan*) parameter N jumlah titik (*grid point*) 100 dan step waktu ( $dt$ ) 0,05 pada interval  $-25 \leq x \leq 25$ . Hasil dari program tersebut yaitu nilai numerik penyelesaian dari persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan pendekatan metode numerik Crank-Nicolson, dan visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dengan keadaan awal (*initial value*) berbentuk paket gelombang. Gambar 2. yaitu grafik visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  yang berbentuk paket gelombang dengan pusat pada  $x = 0$ . Visualisasi tersebut merupakan penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan

menggunakan pendekatan metode numerik dengan interval ruang  $dx = 0,5$  dan interval waktu (*step size*)  $dt = 0,05$  dengan energi potensial  $V = 0$ . Visualisasi tersebut menunjukkan nilai fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  Real (*berwarna biru*) dan Imaginer (*berwarna hijau*) serta probabilitas  $P(x,t)$  (*berwarna merah*). Fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  itu sendiri tidak mempunyai arti fisis apa-apa, tetapi probabilitas  $P(x,t)$  diinterpretasikan sebagai kerapatan probabilitas yaitu kemungkinan (peluang) untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh  $\psi(x,t)$  berada diantara  $x$  dan  $x + dx$  pada saat  $t$  (Purwanto; 2006). Gambar 4.1 visualisasi fungsi gelombang berbentuk paket gelombang yang terlokalisasi pada pusat  $x = 0$ , sehingga peluang untuk ditemukan partikel yaitu pada daerah  $x = 0$ . Untuk energi potensial  $V = 0$ , ini berarti tidak ada gaya yang beraksi pada partikel, tampak pada grafik tersebut nilai Real  $\psi(x,t)$  minimum pada  $x = 0$  dan nilai Imaginer  $\psi(x,t)$  maksimum pada  $0 < x < 5$ . Gambar 3. yaitu grafik visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  yang berbentuk dengan pusat pada  $x = 10$ . Visualisasi tersebut merupakan penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan pendekatan metode numerik dengan interval ruang  $dx = 0,5$  dan interval waktu (*step size*)  $dt = 0,05$ , dengan energi potensial  $V = 0$ . Visualisasi tersebut menunjukkan nilai fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  Real (*berwarna biru*) dan Imaginer (*berwarna hijau*) serta probabilitas  $P(x,t)$  (*berwarna merah*). Fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  itu sendiri tidak mempunyai arti fisis apa-apa, tetapi probabilitas  $P(x,t)$  diinterpretasikan sebagai kerapatan probabilitas yaitu kemungkinan (peluang) untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh  $\psi(x,t)$  berada diantara  $x$  dan  $x + dx$  pada saat  $t$  (Purwanto; 2006). Gambar 4.2 visualisasi fungsi gelombang berbentuk paket gelombang yang terlokalisasi pada pusat  $x = 10$ , sehingga peluang untuk ditemukan partikel yaitu pada daerah  $x = 10$ . Untuk energi potensial  $V = 0$ , ini berarti tidak ada gaya yang beraksi pada partikel, tampak pada grafik tersebut nilai Real  $\psi(x,t)$  minimum pada  $x = 10$  dan nilai Imaginer  $\psi(x,t)$  maksimum pada  $10 < x < 15$ . Gambar 4. yaitu grafik visualisasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  yang berbentuk dengan pusat pada  $x = -10$ . Visualisasi tersebut merupakan penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan pendekatan metode numerik dengan interval ruang  $dx = 0,5$  dan interval waktu (*step size*)  $dt = 0,05$ , dengan energi potensial  $V = 0$ . Visualisasi tersebut menunjukkan nilai fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  Real (*berwarna biru*) dan Imaginer (*berwarna hijau*) serta probabilitas  $P(x,t)$  (*berwarna merah*). Fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  itu sendiri tidak mempunyai arti fisis apa-apa, tetapi probabilitas  $P(x,t)$  diinterpretasikan sebagai kerapatan probabilitas yaitu kemungkinan (peluang) untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh  $\psi(x,t)$  berada diantara  $x$  dan  $x + dx$  pada saat  $t$  (Purwanto; 2006). Gambar 4. visualisasi fungsi gelombang berbentuk paket gelombang yang terlokalisasi pada pusat  $x = -10$ , sehingga peluang untuk ditemukan partikel yaitu pada daerah  $x = -10$ . Untuk energi potensial  $V = 0$ , ini berarti tidak ada gaya yang beraksi pada partikel, tampak pada grafik tersebut nilai Real  $\psi(x,t)$  maksimum pada  $x = -10$  dan nilai Imaginer  $\psi(x,t)$  maksimum pada  $-10 < x < -5$ .

## V. SIMPULAN DAN SARAN

### Simpulan

- 1) Hasil dari program komputer penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dengan menggunakan metode Crank-Nicolson diperoleh nilai numerik dan simulasi yang hampir sama atau tidak ada perbedaan yang signifikan. Hal ini menunjukkan bahwa model

- simulasi yang dituangkan dalam program komputer adalah benar sehingga dapat digunakan sebagai instrumen untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger bergantung waktu.
- 2) Simulasi fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  dan probabilitas  $P(x,t)$  penyelesaian persamaan Schrodinger bergantung waktu dapat digunakan untuk menentukan kemungkinan ditemukan sebuah partikel pada daerah  $x$  dan  $x + dx$  (satu dimensi) pada saat  $t$ .

#### Saran

Sebaiknya dalam menerapkan program memasukan  $dx$  dan  $dt$  yang kecil, sehingga diperoleh hasil dengan taraf ketelitian yang lebih akurat

#### DAFTAR PUSTAKA

- Abdia, A. Gunaidi. (2006). *MATLAB*. Bandung: Informatika Bandung
- Beiser, Arthur. (1990). *Konsep Fisika Modern* Edisi keempat. Jakarta: Erlangga
- Purwanto, Agus.(2006). *Fisika Kuantum*. Yogyakarta: GAVAMEDIA
- Suarga, M.Sc dan Math., M. Ph.D. (2007). *Fisika Komputasi Solusi Problema Fisika dengan MATLAB*. Yogyakarta: ANDI Yogyakarta.
- [http://www.geocities.com/sang\\_nandar/fisika/](http://www.geocities.com/sang_nandar/fisika/) (di akses 20 Juli 2008)
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson_method) ( di akses 15 Juli 2008)
- <http://www.google.co.id/search?solved+Crank-Nicolson> (25 maret 2008)
- [http:// arxiv.org/ps.cache/arxiv](http://arxiv.org/ps.cache/arxiv) (di akses 5 Agustus 2008)
- <http://mat.iitm.ac.in/sryedida/caimna> (di akses 3 September 2008)